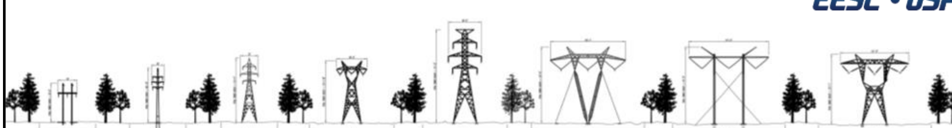
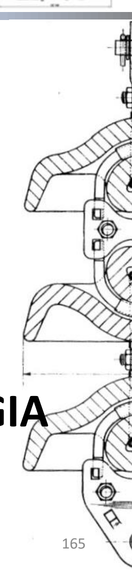
SEL0365 – Linhas de Transmissão de Energia Elétrica

Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação
Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo
Prof. Rogério Andrade Flauzino



SEL0365 – Linhas de Transmissão de Energia Elétrica
Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação
Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo
Prof. Rogério Andrade Flauzino

CAPÍTULO 3
TEORIA DA TRANSMISSÃO DA ENERGIA ELÉTRICA



165

EESC • USP

O Fenômeno de Energização de Linhas de Transmissão

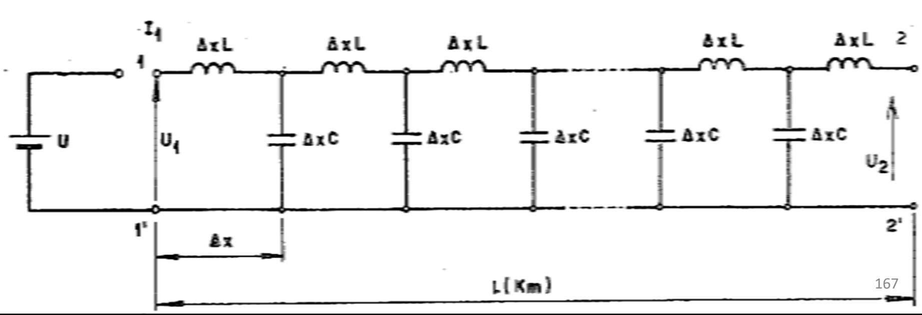
- Nos desenvolvimentos feitos no escopo do estudo envolvendo o fenômeno de energização de linhas de transmissão será considerado:
  - Linha infinita (Os efeitos de terminação da linha serão desconsiderados)
  - Linha sem perdas (A resistência série da linha será desconsiderada)

166

EESC • USP

O Fenômeno de Energização de Linhas de Transmissão

- Nesse desenvolvimento vamos determinar, a princípio, a velocidade de propagação da energia elétrica ao longo da linha de transmissão.
- A velocidade de propagação também é conhecida como celeridade da linha.



167

O Fenômeno de Energização de Linhas de Transmissão

- A velocidade de propagação pode ser definida como:
  - $v = \frac{l}{T}$, onde v é a velocidade de propagação e T é o tempo necessário para que a tensão no receptor seja igual à tensão no transmissor os quais estão distantes um do outro por um comprimento l.

168

O Fenômeno de Energização de Linhas de Transmissão

- Vamos considerar que a energização de um segmento Δx demanda um tempo Δt, ou seja, nesse tempo a tensão no término do segmento Δx sai de 0 e alcança o valor U (tensão do transmissor).
- Nessa condições a variação de carga no segmento Δx será:
  - $\Delta q = CU\Delta x$, onde C é a capacitância da linha por unidade de comprimento.

169

EESC • USP

O Fenômeno de Energização de Linhas de Transmissão

- Dividindo ambos os termos por Δt, tem-se
  - $\frac{\Delta q}{\Delta t} = CU\frac{\Delta x}{\Delta t}$
- O termo $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ é a velocidade de propagação da energia e, por definição, $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ é a corrente, a qual será denotada por I_0, de energização da linha. Assim:
  - $I_0 = CUv$

170

EESC • USP

O Fenômeno de Energização de Linhas de Transmissão

- Ainda considerando o segmento Δx da linha, a variação de corrente observada, ou seja, de zero até o I_0 faz surgir na mesma uma diferença de potencial dada por:
  - $FEM = \Delta x L\frac{di(t)}{dt}$
  - $U = \Delta x L\frac{I_0}{\Delta t} = LI_0\frac{\Delta x}{\Delta t}$
- O termo $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ é a velocidade de propagação da energia:
  - $U = LI_0 v$

171

O Fenômeno de Energização de Linhas de Transmissão

EESC • USP

- Dessa forma, tem-se as seguintes expressões para a velocidade de propagação:
  - $v = \frac{I_0}{CU}$
  - $v = \frac{U}{LI_0}$
- Igualando ambas:
  - $\frac{I_0}{CU} = \frac{U}{LI_0}$
  - $\left(\frac{U}{I_0}\right)^2 = \frac{L}{C}$

172

O Fenômeno de Energização de Linhas de Transmissão

EESC • USP

- Assim, o quadrado da razão entre tensão e corrente será igual à razão da indutância e da capacitância, por unidade de comprimento, da linha.
  - $\left(\frac{U}{I_0}\right)^2 = \frac{L}{C}$
- Define-se $U = Z_0 I$, onde Z_0 é a impedância natural da linha, ou impedância característica ou ainda impedância de surto.

173

EESC • USP

O Fenômeno de Energização de Linhas de Transmissão

- Assim,
  - $Z_0 = \frac{U}{I}$
  - ${Z_0}^2 = \frac{L}{C}$
  - $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$

174

EESC • USP

O Fenômeno de Energização de Linhas de Transmissão

- Z_0 pode ser substituído na expressões para o cálculo da velocidade
  - $v = \frac{U}{LI_0}$
  - $v = \frac{1}{L} Z_0$
  - $v = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{L}{C}}$
  - $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ Podemos verificar que a velocidade de propagação independe do comprimento da linha

175

O Fenômeno de Energização de Linhas de Transmissão

- Considerando-se um condutor cilíndro e sólido com raio r instalado à uma altura h do solo, tem-se:
  - $L = 2 \times 10^{-7} ln\left(\frac{2h}{r'}\right)$
  - $C^{-1} = 18 \times 10^{9} ln\left(\frac{2h}{r}\right)$

176

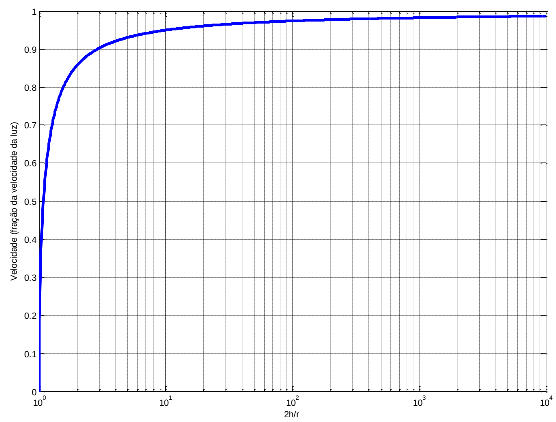
O Fenômeno de Energização de Linhas de Transmissão

- Para condutores sólidos:
  - $r' = e^{-\frac{1}{4}} r$
  - $v = c\sqrt{\frac{ln\left(\frac{2h}{r}\right)}{ln\left(\frac{2h}{e^{-\frac{1}{4}}r}\right)}} = c\sqrt{\frac{ln(2h) - ln(r)}{ln(2h) - ln(r) + 1/4}}$
  - $v = c\sqrt{\frac{ln\left(\frac{2h}{r}\right)}{ln\left(\frac{2h}{r}\right) + 1/4}}$

177

O Fenômeno de Energização de Linhas de Transmissão

- Variação da velocidade de propagação em função da relação $2h/r$



178

O Fenômeno de Energização de Linhas de Transmissão

- Variação da velocidade de propagação em função da relação $2h/r$
  - $2h/r$ = 10 $\rightarrow v = 94.98\%$ de c.
  - $2h/r$ = 100 $\rightarrow v = 97.39\%$ de c.
  - $2h/r$ = 1000 $\rightarrow v = 98.24\%$ de c.
- Por meio desses resultados é possível verificar que cabos muito próximos ao solo e os subterrâneos possuem uma velocidade de propagação muito baixa se comparada com as linhas aereas.

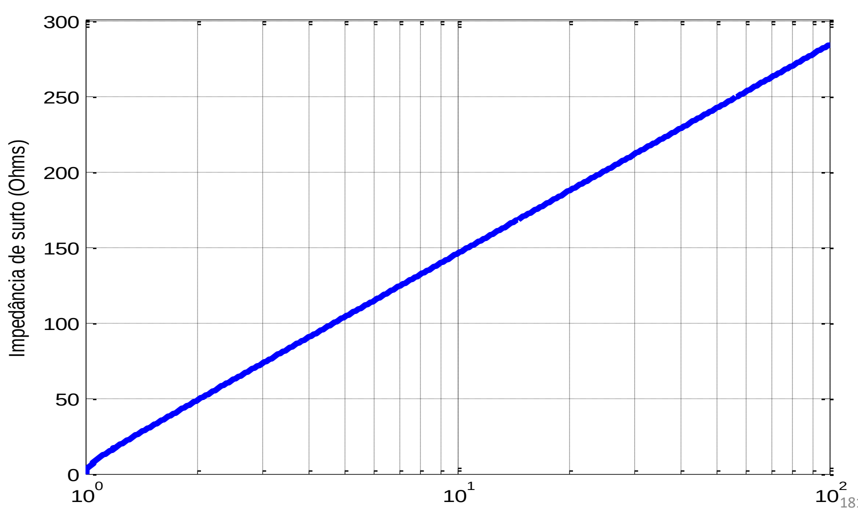
179

O Fenômeno de Energização de Linhas de Transmissão

- Com relação à impedância de surto da linha, tem-se:
  - $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$
  - $Z_0 = \sqrt{2 \times 10^{-7} ln\left(\frac{2h}{r'}\right) 18 \times 10^{9} ln\left(\frac{2h}{r}\right)}$
  - $Z_0 = 60\sqrt{ln\left(\frac{2h}{r'}\right) ln\left(\frac{2h}{r}\right)}$
- Para sistemas elétricos de potência:
  - $Z_0 \approx 60 ln\left(\frac{2h}{r}\right)$

180

O Fenômeno de Energização de Linhas de Transmissão



181

EESC • USP

Relações de Energia

- Ao se ter uma corrente I_0 circulando por uma linha de transmissão a energia armazenada no campo magnético em um segmento com comprimento Δx será:
  - $E_m = \frac{1}{2}\Delta x L {I_0}^2$
- Ao se ter uma tensão U sob um segmento com comprimento Δx a energia armazenada no campo elétrico será:
  - $E_e = \frac{1}{2}\Delta x C U^2$

182

EESC • USP

Relações de Energia

- Dessa maneira, a energia armazenada em um segmento com comprimento Δx será:
  - $E = E_m + E_e = \frac{1}{2}\Delta x L {I_0}^2 + \frac{1}{2}\Delta x C U^2$
- Como $U = Z_0 I$ e $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$, tem-se:
  - $E_e = \frac{1}{2}\Delta x C U^2 = \frac{1}{2}\Delta x C {I_0}^2 \frac{L}{C} = \frac{1}{2}\Delta x L {I_0}^2$
  - Portanto: $E_e = E_m$, ou seja, a energia armazenada no campo elétrico será igual àquela armazenada no campo magnético.

183

EESC • USP

Relações de Energia

- A energia armazenada em um segmento com comprimento Δx será:
  - $E = \Delta x L {I_0}^2$
  - $E = \Delta x C U^2$

184

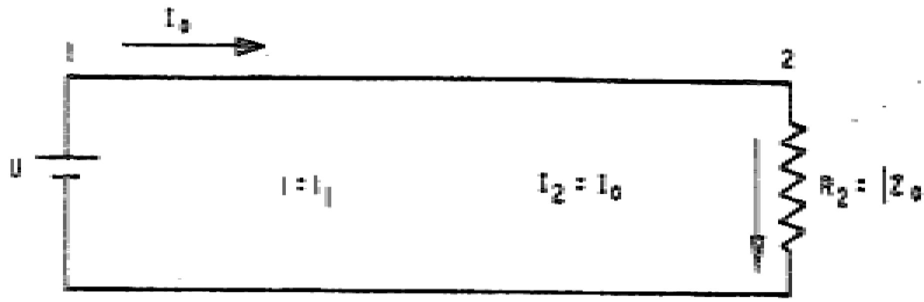
EESC • USP

Relações de Energia

- Os desenvolvimentos consideram que a linha possue um comprimento infinito.
- Será agora considerado linhas finitas e como a terminação da linha influência no comportamento das grandezas elétricas ao longo da linha de transmissão.
- Vamos inicialmente considerar que:
  - $R_2 = Z_0$

185

Relações de Energia



Quando em R_2 se tiver uma tensão U a corrente será igual à corrente de energização da linha, ou seja, I_0.

186

Relações de Energia

- Nessas condições, a energia fornecida pelo transmissor (fonte) à linha de transmissão será dissipada inteiramente no receptor (carga)
- Quando se tem uma linha de transmissão terminada com uma impedância igual à sua impedância de surto denomina-se essa linha por *linha infinita*.

187

Relações de Energia

- Será considerado agora uma linha com terminação aberta.
- Nessa condições a corrente no término da linha será nula.
- A tensão no segmento final Δx da linha será denotada por U_2. Dessa forma a energia armazenada nesse segmento será:
  - $\mathrm{E} = \frac{1}{2}\Delta x C {U_2}^{2}$

188

Relações de Energia

- Porém, como já apresentado, a energia armazenada nesse segmento era dada por:
  - $E = \Delta x C U^2$
- No instante de tempo seguinte, $t + \Delta t$, a fonte injeta uma parcela de energia igual a:
  - $E = \Delta x C U^2$
- Como não há elemento para dissipação de energia, em $t + \Delta t$, tem-se uma energia armazenada no segmento Δx igual a:
  - $E = 2\Delta x C U^2$

189

Relações de Energia

- Igualando as expressões para as energias armazenadas no segmento Δx final, tem-se:
  - $\frac{1}{2}\Delta x C {U_2}^2 = 2\Delta x C U^2$
  - ${U_2}^2 = 4U^2$
- Portanto, a tensão terminal na linha será:
  - $U_2 = 2U$
- Assim, a tensão no terminal da linha será o dobro da tensão na fonte.

190

Relações de Energia

- Considerando-se uma linha com terminação curto-circuitada, tem-se que a tensão terminal da linha será nula e toda a energia será armazenada no campo magnético.
- A corrente no segmento final Δx da linha será denotada por I_2. Dessa forma a energia armazenada nesse segmento será:
  - $\mathrm{E} = \frac{1}{2}\Delta x L {I_2}^2$

191

EESC • USP

Relações de Energia

- Porém, como já apresentado, a energia armazenada nesse segmento era dada por:
  - $E = \Delta x L {I_0}^2$
- No instante de tempo seguinte, $t + \Delta t$, a fonte injeta uma parcela de energia igual a:
  - $E = \Delta x L {I_0}^2$
- Como não há elemento para dissipação de energia, em $t + \Delta t$, tem-se uma energia armazenada no segmento Δx igual a:
  - $E = 2\Delta x L {I_0}^2$

192

EESC • USP

Relações de Energia

- Igualando as expressões para as energias armazenadas no segmento Δx final, tem-se:
  - $\frac{1}{2}\Delta x L {I_2}^2 = 2\Delta x L {I_0}^2$
  - ${I_2}^2 = 4{I_0}^2$
- Portanto, a corrente terminal na linha será:
  - $I_2 = 2I_0$
- Assim, a corrente no terminal da linha será o dobro da corrente na fonte.

193

EESC • USP

Ondas Viajantes

- Como apresentado inicialmente, a energia flui pela linha a uma velocidade constante e dependente das características da linha (Indutância e capacitância).
- Assim, ao se energizar uma linha parte do transmissor (fonte) duas ondas, uma de tensão e outra de corrente, em direção ao receptor.
- Essa ondas ao alcançarem o receptor são denominadas de ondas incidentes.

194

EESC • USP

Ondas Viajantes

- Dependendo das característica da impedância terminal poderão haver ondas refletidas, ou seja, que caminham do receptor, carga, em direção ao transmissor.
- As ondas refletidas “viajam” a uma mesma velocidade das ondas incidentes.

195

EESC • USP

Ondas Viajantes

- As ondas de tensão e de corrente são polarizadas, ou seja, possuem sinal.
- A tensão e a corrente em cada ponto da linha é resultado da soma algébrica das grandezas incidentes e as refletidas:
  - $U = U_i \pm U_r$
  - $I = I_i \pm I_r$

196

EESC • USP

Ondas Viajantes

- Vamos verificar como se portam as ondas viajantes para os casos investigados.
  - Linha com impedância terminal igual à impedância de surto
    - A tensão e a corrente na terminação da linha são iguais àquelas no emissor.
    - Dessa maneira, as ondas refletidas de tensão e de corrente são nulas.

197

Ondas Viajantes

- Linha com impedância terminal maior do que a impedância de surto
  - A tensão no receptor é superior do que a tensão no transmissor.
  - A corrente no transmissor é inferior do que a corrente no transmissor.
  - Dessa maneira, a onda refletida de tensão tem a mesma polaridade que a onda de tensão incidente e a onda refletida de corrente tem polaridade oposta a onda de corrente incidente.

198

Ondas Viajantes

- Linha com impedância terminal menor do que a impedância de surto
  - A tensão no receptor é inferior do que a tensão no transmissor.
  - A corrente no transmissor é superior do que a corrente no transmissor.
  - Dessa maneira, a onda refletida de tensão tem polaridade oposta do que a onda de tensão incidente e a onda refletida de corrente tem a mesma polaridade que a onda de corrente incidente.

199

EESC • USP

Ondas Viajantes

- Conclusão:
  - As ondas de tensão e corrente refletidas possuem polaridades opostas.
  - Essa característica nos permitirá os coeficientes de reflexão de onda.
- Lembrando que:
  - $U_2 = U_i \pm U_r$
  - $I_2 = I_i \mp I_r$

200

EESC • USP

Ondas Viajantes

- E que as características de propagação das ondas incidentes são iguais às das ondas refletidas, tem-se:
  - $\frac{U_i}{I_i} = Z_0$
  - $\frac{U_r}{I_r} = -Z_0$
  - $\frac{U_2}{I_2} = Z_2$

201

Ondas Viajantes

- O objetivo é relacionar as ondas refletidas, de tensão e de corrente, com as respectivas ondas incidentes. Assim,
  - $\frac{U_i+U_r}{I_i+I_r} = Z_2$
- Porém,
  - $I_i = \frac{U_i}{Z_0}$
  - $I_r = -\frac{U_r}{Z_0}$

Ondas Viajantes

- Então,
  - $\frac{U_i+U_r}{\frac{U_i}{Z_0}-\frac{U_r}{Z_0}} = Z_2$
  - $Z_0(U_i + U_r) = Z_2(U_i - U_r)$
  - $U_r(Z_2 + Z_0) = U_i(Z_2 - Z_0)$
  - $U_r = U_i\frac{Z_2-Z_0}{Z_2+Z_0}$
  - $U_r = k_{ru}U_i$
  - Onde $k_{ru} = \frac{Z_2-Z_0}{Z_2+Z_0}$ é o coeficiente de reflexão de tensão na terminação da linha com a carga Z_2

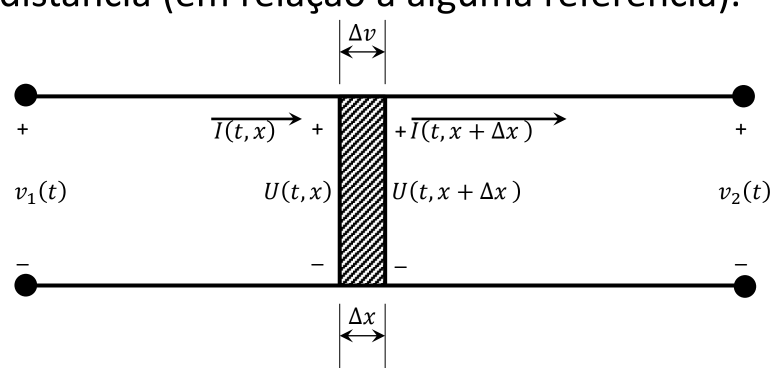
Ondas Viajantes

- Para a onde de corrente refletida, tem-se:
  - $I_r = -\frac{U_r}{Z_0}$
  - $I_r = \frac{U_i}{Z_0}\frac{Z_0 - Z_2}{Z_2 + Z_0}$
  - $I_r = I_i \frac{Z_0 - Z_2}{Z_2 + Z_0}$
  - $I_r = k_{ri} I_i$
  - Onde $k_{ri} = \frac{Z_0 - Z_2}{Z_2 + Z_0}$ é o coeficiente de reflexão de corrente na terminação da linha com a carga Z_2

204

Equações Diferenciais das Linhas de Transmissão

- A tensão e a corrente ao longo de uma linha de transmissão irá variar em função da distância (em relação a alguma referência).



205

EESC • USP

Equações Diferenciais das Linhas de Transmissão

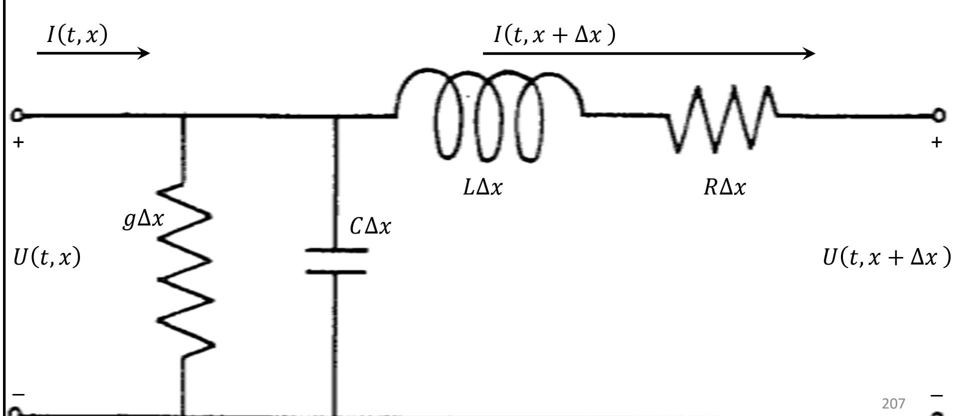
- Considerando que a variação da tensão ao longo da linha seja dada por $\frac{\partial v}{\partial x}$, tem-se a tensão Δv sobre o elemento de comprimento Δx será:
  - $\Delta v = U(t,x) - U(t,x+\Delta x) = \Delta x \frac{\partial v}{\partial x}$
- e que a variação da corrente ao longo da linha seja dada por $\frac{\partial i}{\partial x}$, tem-se:
  - $\Delta i = I(t,x) - I(t,x+\Delta x) = \Delta x \frac{\partial i}{\partial x}$

206

EESC • USP

Equações Diferenciais das Linhas de Transmissão

- O modelo equivalente de um segmento Δx de linha pode ser dado por:



207

EESC • USP

Equações Diferenciais das Linhas de Transmissão

- Por meio do modelo é possível escrever:
  - $U(t,x) - U(t,x+\Delta x\ ) = R\Delta x I(t,x+\Delta x) + L\Delta x \frac{\partial}{\partial t} I(t,x+\Delta x)$
  - $I(t,x) - I(t,x+\Delta x\ ) = g\Delta x U(t,x) + C\Delta x \frac{\partial}{\partial t} U(t,x)$

208

EESC • USP

Equações Diferenciais das Linhas de Transmissão

- Dividindo ambos os termos por Δx:
  - $\frac{U(t,x)-U(t,x+\Delta x\ )}{\Delta x} = RI(t,x) + L\frac{\partial}{\partial t} I(t,x)$
  - $\frac{I(t,x)-I(t,x+\Delta x\ )}{\Delta x} = g\Delta x U(t,x) + C\Delta x \frac{\partial}{\partial t} U(t,x)$
- Fazendo $\Delta x\ \ \rightarrow 0$, tem-se:
  - $\frac{\partial U(t,x)}{\partial x} = -RI(t,x) - L\frac{\partial}{\partial t} I(t,x)$
  - $\frac{\partial I(t,x)}{\partial x} = -gU(t,x) - C\frac{\partial}{\partial t} U(t,x)$

209

Equações Diferenciais das Linhas de Transmissão

- Diferenciando $\frac{\partial U(t,x)}{\partial x}$ em relação a t e em relação a x, tem-se:
  - $-\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t \partial x} = R\frac{\partial I(t,x)}{\partial t} + L\frac{\partial^2 I(t,x)}{\partial t^2}$
  - $-\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x^2} = R\frac{\partial I(t,x)}{\partial x} + L\frac{\partial^2 I(t,x)}{\partial x \partial t}$

210

Equações Diferenciais das Linhas de Transmissão

- Diferenciando $\frac{\partial I(t,x)}{\partial x}$ em relação a t e em relação a x, tem-se:
  - $-\frac{\partial^2 I(t,x)}{\partial t \partial x} = g\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} + C\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2}$
  - $-\frac{\partial^2 I(t,x)}{\partial x^2} = g\frac{\partial U(t,x)}{\partial x} + C\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x \partial t}$

211

EESC • USP

Equações Diferenciais das Linhas de Transmissão

- Como:
  - $\frac{\partial^2 I(t,x)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 I(t,x)}{\partial x \partial t}$ e $\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x \partial t}$
- Por substituição direta, tem-se:
  - $\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x^2} = R\left(gU(t,x) + C\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right) + L\left(g\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} + C\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2}\right)$
  - $\frac{\partial^2 I(t,x)}{\partial x^2} = g\left(RI(t,x) + L\frac{\partial I(t,x)}{\partial t}\right) + C\left(R\frac{\partial I(t,x)}{\partial t} + L\frac{\partial^2 I(t,x)}{\partial t^2}\right)$

212

EESC • USP

Equações Diferenciais das Linhas de Transmissão

- Dessa forma, tem-se as equações diferenciais gerais das linhas de transmissão:
  - $\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x^2} = RgU(t,x) + (RC + Lg)\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2}$
  - $\frac{\partial^2 I(t,x)}{\partial x^2} = RgI(t,x) + (RC + Lg)\frac{\partial I(t,x)}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 I(t,x)}{\partial t^2}$
- Essas equações também são chamadas de equações de ondas ou “Equação dos Telegrafistas”

213

EESC • USP

Solução das Equações Diferenciais no Domínio a Frequência

- Considerando a linha sendo alimentada por uma excitação senoidal com frequencia angular ω e representando a variação das grandezas elétricas em função de x de forma implícita, tem-se:
  - $u(t,x) = \dot{U}_x \cos(\omega t)$
  - $i(t,x) = \dot{I}_x \cos(\omega t)$

214

EESC • USP

Solução das Equações Diferenciais no Domínio a Frequência

- Representando as expressões de tensão e de corrente por meio de sua excitação complexa correspondente, tem-se:
  - $u(t,x) = \dot{U}_x(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)) = \dot{U}_x e^{j\omega t}$
  - $i(t,x) = \dot{I}_x(\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)) = \dot{I}_x e^{j\omega t}$

215

EESC • USP

Solução das Equações Diferenciais no Domínio a Frequência

- Substituindo a expressão anterior de tensão nas equações gerais de linhas de transmissão, tem-se:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dot{U}_x e^{j\omega t}\right) = gR\dot{U}_x e^{j\omega t} + \left(RC + gL\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{U}_x e^{j\omega t}\right) + LC\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dot{U}_x e^{j\omega t}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dot{U}_x e^{j\omega t}\right) = gR\dot{U}_x e^{j\omega t} + j\omega\left(RC + gL\right)\dot{U}_x e^{j\omega t} + \left(j\omega\right)^2 LC\dot{U}_x e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(U_x\right) = gR\dot{U}_x + j\omega\left(RC + gL\right)\dot{U}_x - \omega^2 LC\dot{U}_x$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dot{U}_x\right) = \dot{U}_x\left(gR - \omega^2 LC + j\omega\left(RC + gL\right)\right)$$

216

EESC • USP

Solução das Equações Diferenciais no Domínio a Frequência

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dot{U}_x\right) = \dot{U}_x\left(g + j\omega C\right)\left(R + j\omega L\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dot{U}_x\right) = \dot{U}_x YZ$$

- Vamos verificar se a seguinte solução é plausível:

$$\dot{U}_x = A_1 e^{x\sqrt{YZ}} + A_2 e^{-x\sqrt{YZ}}$$

217

Solução das Equações Diferenciais no Domínio a Frequência

- Substituindo e desenvolvendo, tem-se:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dot{U}_x\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(A_1 e^{x\sqrt{YZ}}+A_2 e^{-x\sqrt{YZ}}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dot{U}_x\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(A_1\sqrt{YZ}e^{x\sqrt{YZ}}-\sqrt{YZ}A_2 e^{-x\sqrt{YZ}}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dot{U}_x\right)=A_1 YZe^{x\sqrt{YZ}}+A_2 YZe^{-x\sqrt{YZ}}$$

$$\dot{U}_x YZ=A_1 YZe^{x\sqrt{YZ}}+A_2 YZe^{-x\sqrt{YZ}}$$

$$\dot{U}_x=A_1 e^{x\sqrt{YZ}}+A_2 e^{-x\sqrt{YZ}}$$

$$\dot{U}_x=\dot{U}_x$$

Ou seja, a escolha de $\dot{U}_x = A_1 e^{x\sqrt{YZ}} + A_1 e^{-x\sqrt{YZ}}$ se mostrou uma solução plausível para a tensão.

Solução das Equações Diferenciais no Domínio a Frequência

- Fazendo o mesmo para a corrente:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dot{I}_x e^{j\omega t}\right)=gR\dot{I}_x e^{j\omega t}+\left(RC+gL\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{I}_x e^{j\omega t}\right)+LC\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dot{I}_x e^{j\omega t}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dot{I}_x e^{j\omega t}\right)=gR\dot{I}_x e^{j\omega t}+j\omega\left(RC+gL\right)\left(\dot{I}_x e^{j\omega t}\right)+\left(j\omega\right)^2 LC\dot{I}_x e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dot{I}_x e^{j\omega t}\right)=gR\dot{I}_x e^{j\omega t}+j\omega\left(RC+gL\right)\left(\dot{I}_x e^{j\omega t}\right)-\omega^2 LC\dot{I}_x e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dot{I}_x\right)=\dot{I}_x\left(gR+j\omega\left(RC+gL\right)-\omega^2 LC\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dot{I}_x\right)=\dot{I}_x\left(g+j\omega C\right)\left(R+j\omega L\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dot{I}_x\right)=YZ\dot{I}_x$$

EESC • USP

Solução das Equações Diferenciais no Domínio a Frequência

- Para apontar uma solução candidata para a corrente é necessário investigar como a tensão e a corrente se relacionam, ou seja, partindo da solução candidata da tensão como deve ser a solução para a corrente.
- Assim, lembrando que:

$$\frac{\partial^2 i(t,x)}{\partial t \partial x} = g\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + C\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial x}\left(\dot{I}_x e^{j\omega t}\right) = g\frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{U}_x\right) + C\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dot{U}_x\right)$$

220

EESC • USP

Solução das Equações Diferenciais no Domínio a Frequência

$$j\omega\frac{\partial}{\partial x}\left(\dot{I}_x e^{j\omega t}\right) = j\omega g\dot{U}_x e^{j\omega t} - \omega^2 C\dot{U}_x e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\dot{I}_x\right) = \left(g + j\omega C\right)\dot{U}_x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\dot{I}_x\right) = Y\dot{U}_x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\dot{I}_x\right) = Y\left(A_1 e^{x\sqrt{YZ}} + A_2 e^{-x\sqrt{YZ}}\right)$$

$$\dot{I}_x = \frac{Y}{\sqrt{YZ}}\left(A_1 e^{x\sqrt{YZ}} - A_2 e^{-x\sqrt{YZ}}\right)$$

$$\dot{I}_x = \frac{1}{\sqrt{Z/Y}}\left(A_1 e^{x\sqrt{YZ}} - A_2 e^{-x\sqrt{YZ}}\right)$$

Ou seja, a escolha de $\dot{U}_x = A_1 e^{x\sqrt{YZ}} + A_1 e^{-x\sqrt{YZ}}$ implica que a corrente tenha essa solução.

221

Solução das Equações Diferenciais no Domínio a Frequência

- Substituindo e desenvolvendo, tem-se:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dot{I}_x\right)=\frac{1}{\sqrt{Z/Y}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(A_1 e^{x\sqrt{YZ}}-A_2 e^{-x\sqrt{YZ}}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dot{I}_x\right)=\frac{1}{\sqrt{Z/Y}}\frac{\partial}{\partial x}\left(A_1\sqrt{YZ}e^{x\sqrt{YZ}}+A_2\sqrt{YZ}e^{-x\sqrt{YZ}}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dot{I}_x\right)=\frac{1}{\sqrt{Z/Y}}\left(A_1 YZe^{x\sqrt{YZ}}-A_2 YZe^{-x\sqrt{YZ}}\right)$$

$$YZ\dot{I}_x=\frac{1}{\sqrt{Z/Y}}\left(A_1 YZe^{x\sqrt{YZ}}-A_2 YZe^{-x\sqrt{YZ}}\right)$$

$$\dot{I}_x=\frac{1}{\sqrt{Z/Y}}\left(A_1 e^{x\sqrt{YZ}}-A_2 e^{-x\sqrt{YZ}}\right)$$

$$\dot{I}_x=\dot{I}_x$$

A escolha de $\dot{U}_x = A_1 e^{x\sqrt{YZ}} + A_1 e^{-x\sqrt{YZ}}$ se mostrou uma solução plausível tanto para a tensão como para a corrente

Solução das Equações Diferenciais no Domínio a Frequência

- As constantes A_1 e A_2 são determinadas em função das condições de contorno a serem respeitadas.
- Como já apresentado, a linha tem o seu comportamento influenciado pela carga, assim, será considerado o receptor (carga) como origem de x.
- Será considerado que na carga se tenha um tensão $\dot{U}_2$ e uma corrente $\dot{I}_2$.

EESC • USP

Solução das Equações Diferenciais no Domínio a Frequência

- Dessa forma:

$$\dot{U}_2 = A_1 + A_2$$

$$\dot{I}_2 = \frac{1}{\sqrt{Z/Y}}\left(A_1 - A_2\right) \qquad \dot{I}_2\sqrt{Z/Y} = A_1 - A_2$$

$$A_2 = A_1 - \dot{I}_2\sqrt{Z/Y} \qquad A_2 = A_1 - \dot{I}_2\sqrt{Z/Y}$$

$$\dot{U}_2 = A_1 + A_1 - \dot{I}_2\sqrt{Z/Y} \qquad A_2 = \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2\sqrt{Z/Y}}{2}$$

$$2A_1 = \dot{U}_2 + \dot{I}_2\sqrt{Z/Y}$$

$$A_1 = \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2\sqrt{Z/Y}}{2}$$

224

EESC • USP

Solução das Equações Diferenciais no Domínio a Frequência

- Assim, tem-se as seguintes expressões para as grandezas elétricas ao longo para a linha de transmissão:

$$\dot{U}_x = \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2\sqrt{Z/Y}}{2}e^{x\sqrt{YZ}} + \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2\sqrt{Z/Y}}{2}e^{-x\sqrt{YZ}}$$

$$\dot{I}_x = \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2\sqrt{Z/Y}}{2\sqrt{Z/Y}}e^{x\sqrt{YZ}} - \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2\sqrt{Z/Y}}{2\sqrt{Z/Y}}e^{-x\sqrt{YZ}}$$

225

EESC • USP

Comportamento das Grandezas Elétricas ao Longo da Linha

- Pelos desenvolvimentos apresentados é possível verificar que os termos $e^{\pm x\sqrt{YZ}}$, modulam os fasores de tensão e de corrente.
- Essa modulação acontece em função da distância x e do número complexo $\sqrt{YZ}$.
- O objetivo será de verificar como podem ser calculadas as parcelas reais e imaginárias de $\sqrt{YZ}$.

226

EESC • USP

Comportamento das Grandezas Elétricas ao Longo da Linha

$$\gamma = \sqrt{YZ} = \sqrt{(g + j\omega C)(R + j\omega L)}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(g + j\omega C)(R + j\omega L)}$$

Elevando ambos os lados da igualdade ao quadrado

$$\alpha^2 - \beta^2 + j2\alpha\beta = (gR - \omega^2 LC) + j\omega(RC + gL)$$

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = (gR - \omega^2 LC) \\ 2\alpha\beta = \omega(RC + gL) \end{cases}$$

$$\beta = \frac{\omega}{2\alpha}(RC + gL)$$

$$\alpha^2 - \frac{1}{4}\frac{\omega^2}{\alpha^2}(RC + gL)^2 = (gR - \omega^2 LC)$$

227

EESC • USP

Comportamento das Grandezas Elétricas ao Longo da Linha

$$4\alpha^4 - 4\alpha^2\left(gR - \omega^2 LC\right) - \omega^2\left(RC + gL\right)^2 = 0$$

$$\alpha^4 - \alpha^2\left(gR - \omega^2 LC\right) - \frac{\omega^2}{4}\left(RC + gL\right)^2 = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{\left(gR - \omega^2 LC\right) \pm \sqrt{\left(gR - \omega^2 LC\right)^2 + 4\frac{\omega^2}{4}\left(RC + gL\right)^2}}{2}$$

Como alfa é um número real

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}\left(gR - \omega^2 LC\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(gR - \omega^2 LC\right)^2 + \omega^2\left(RC + gL\right)^2}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left(gR - \omega^2 LC\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(gR - \omega^2 LC\right)^2 + \omega^2\left(RC + gL\right)^2}}$$

228

EESC • USP

Comportamento das Grandezas Elétricas ao Longo da Linha

$$\beta^2 = \alpha^2 - \left(gR - \omega^2 LC\right)$$

$$\beta^2 = \frac{1}{2}\left(gR - \omega^2 LC\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(gR - \omega^2 LC\right)^2 + \omega^2\left(RC + gL\right)^2} - \left(gR - \omega^2 LC\right)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\omega^2 LC - gR\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(gR - \omega^2 LC\right)^2 + \omega^2\left(RC + gL\right)^2}}$$

$$e^{\pm x\sqrt{YZ}} = e^{\pm x\alpha} e^{\pm jx\beta}$$

- Pode-se verificar que existe um amortecimento provocado por $e^{\pm x\alpha}$ que, dependendo do sinal do expoente, é positivo ou negativo, ou seja, provoca o aumento ou a diminuição das amplitudes das ondas senoidais de forma exponencial em função do distanciamento do receptor.

229

EESC • USP

Comportamento das Grandezas Elétricas ao Longo da Linha

- Ocorre ao mesmo tempo um avanço de fase de $\pm\, x\beta$.
- Dessa forma, é o expoente γ que governa a forma pela qual a onda se propaga ao longo da linha.
- Por essa razão γ é conhecida como função de propagação ou, como é encontrado na literatura de linhas de transmissão de energia elétrica, por constante de propagação.
- Considerando que ω não varia, γ será uma constante mesmo.

230

EESC • USP

Comportamento das Grandezas Elétricas ao Longo da Linha

- A parte real de γ, α, é a parcela responsável pelo amortecimento ou atenuação das amplitudes e por essa ração é denominada por função de atenuação.
- A unidade empregada em linhas de transmissão de energia elétrica para α é o Np/m (Np = Néper)
- $\alpha = \frac{1}{l} ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right)$

231

EESC • USP

Comportamento das Grandezas Elétricas ao Longo da Linha

- Considerando o caso particular onde a resistência série é desprezível e a condutância shunt tende a zero, tem-se:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left(gR - \omega^2 LC\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(gR - \omega^2 LC\right)^2 + \omega^2 \left(RC + gL\right)^2}}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left(0 - \omega^2 LC\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(0 - \omega^2 LC\right)^2 + \omega^2 \left(0 + 0\right)^2}}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\omega^2 LC - \frac{1}{2}\omega^2 LC}$$

$$\alpha = 0$$

Quando a resistência série é desprezível e a condutância shunt tende a zero a constante de atenuação será nula, ou seja, não há alteração da magnitude das ondas.

232

EESC • USP

Comportamento das Grandezas Elétricas ao Longo da Linha

- A parte imaginária de γ, β, é denominada por função de fase ou constante de fase e indica com as fases da tensão e da corrente variam ao longo da linha.
- A unidade para β é o rad/m.

233

Comportamento das Grandezas Elétricas ao Longo da Linha

- Tomando as expressões de $\dot{U}_x$ e $\dot{I}_x$ e recordando que cada uma é a soma das ondas incidentes e refletidas e que as parcelas incidentes ou refletidas da corrente se relacionam com as respectivas componentes da tensão por meio da impedância característica, tem-se:

234

Comportamento das Grandezas Elétricas ao Longo da Linha

$$\frac{\dot{U}_x}{\dot{I}_x}=\frac{\overbrace{\boxed{\dfrac{\dot{U}_2+\dot{I}_2\sqrt{Z/Y}}{2}e^{x\sqrt{YZ}}}}^{\text{Componente incidente da tensão}}+\overbrace{\boxed{\dfrac{\dot{U}_2-\dot{I}_2\sqrt{Z/Y}}{2}e^{-x\sqrt{YZ}}}}^{\text{Componente refletida da tensão}}}{\underbrace{\boxed{\dfrac{\dot{U}_2+\dot{I}_2\sqrt{Z/Y}}{2\sqrt{Z/Y}}e^{x\sqrt{YZ}}}}_{\text{Componente incidente da corrente}}-\underbrace{\boxed{\dfrac{\dot{U}_2-\dot{I}_2\sqrt{Z/Y}}{2\sqrt{Z/Y}}e^{-x\sqrt{YZ}}}}_{\text{Componente refletida da corrente}}}$$

235

EESC • USP

Comportamento das Grandezas Elétricas ao Longo da Linha

- Dessa maneira, define-se a impedância característica da seguinte forma:

$$Z_C = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{g + j\omega C}}$$

A impedância característica de uma linha é um grandeza complexa.

- Considerando o caso particular onde a resistência série é desprezível e a condutância shunt tende a zero, tem-se:

$$Z_C = \sqrt{\frac{L}{C}} = Z_0$$

Nessa condições a impedância característica tende a ser igual a impedância de surto

236

EESC • USP

Comportamento das Grandezas Elétricas ao Longo da Linha

- Vamos investigar agora a velocidade de propagação das ondas.
- Para isso vamos considerar que:

$$\begin{cases} \dot{A}_1 = A_1 e^{j\psi_1} \\ \dot{A}_2 = A_2 e^{j\psi_2} \end{cases}$$

- Nessas condições:

$$\dot{U}_x = A_1 e^{x\sqrt{YZ}} + A_2 e^{-x\sqrt{YZ}}$$

$$\dot{U}_x = A_1 e^{j\psi_1} e^{x(\alpha + j\beta)} + A_2 e^{j\psi_2} e^{-x(\alpha + j\beta)}$$

$$\dot{U}_x = A_1 e^{\alpha x} e^{j(\beta x + \psi_1)} + A_2 e^{-\alpha x} e^{-j(\beta x - \psi_2)}$$

237

EESC • USP

Comportamento das Grandezas Elétricas ao Longo da Linha

- No domínio do tempo, tem-se:

$$u(x,t) = \sqrt{2}A_1 e^{\alpha x}\left(\cos(\omega t + \beta x + \psi_1) + j\,\mathrm{sen}(\omega t + \beta x + \psi_1)\right) + \cdots$$

$$\cdots + \sqrt{2}A_2 e^{-\alpha x}\left(\cos(\omega t + \beta x - \psi_2) - j\,\mathrm{sen}(\omega t + \beta x - \psi_2)\right)$$

- Contudo, $u(x,t)$ possui apenas parte real:

$$u(x,t) = \underbrace{\sqrt{2}A_1 e^{\alpha x}\cos(\omega t + \beta x + \psi_1)}_{\text{Onda de tensão incidente}} + \underbrace{\sqrt{2}A_2 e^{-\alpha x}\cos(\omega t + \beta x - \psi_2)}_{\text{Onda de tensão refletida}}$$

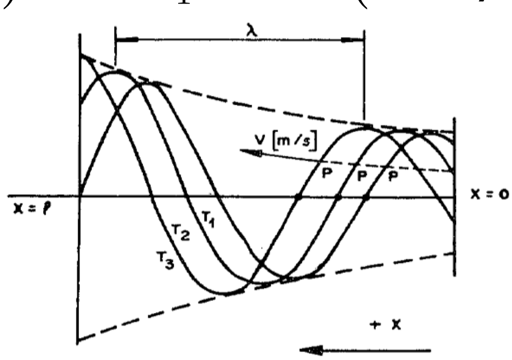
238

EESC • USP

Comportamento das Grandezas Elétricas ao Longo da Linha

- Considerando apenas a parcela da tensão incidente, ou seja:

$$u(x,t) = \sqrt{2}A_1 e^{\alpha x}\cos(\omega t + \beta x + \psi_1)$$



239

EESC • USP

Comportamento das Grandezas Elétricas ao Longo da Linha

- Conforme se distancia da origem a amplitude aumenta exponencialmente.
- Considerando um ponto com mesma fase, tem-se:

$$\omega t + \beta x + \psi_1 = k$$

- Derivando em função do tempo, tem-se:

$$\frac{\partial\left(\omega t + \beta x + \psi_1\right)}{\partial t} = 0$$

240

EESC • USP

Comportamento das Grandezas Elétricas ao Longo da Linha

$$\omega + \beta \frac{\partial(x)}{\partial t} = 0 \qquad \omega + \beta v = 0 \qquad v = -\frac{\omega}{\beta}$$

- Considerando o caso particular onde a resistência série é desprezível e a condutância shunt tende a zero, tem-se:

$$\beta = \omega\sqrt{LC}$$

$$v = -\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

241